השיעורים התמקדו ב-3 אי-שוויונים מרכזיים:

I. אי-שוויון הממוצעים (Cauchy, או AM-GM):

אם $x_i > 0$; $\alpha_i \ge 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ אז $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ge \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$.

מקרה פרטי: $\alpha_i = \frac{1}{n}$ לכל i, אז $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

II. קושי-שוורץ (Cauchy-Schwartz, או Cauchy-Bunyakovski-Schwarz)

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \ge \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2$$

לכל מספרים ממשיים.

מסקנה: אם $b_i > 0$ אז $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$.

III. אי-שוויון הולדר (Hölder) $a_i, b_i \ge 0$, $\alpha, \beta > 0$ אז

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^{\alpha}\left(b_1 + b_2 + \ldots + b_n\right)^{\beta} \ge \left(\left(a_1^{\alpha} b_1^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \left(a_2^{\alpha} b_2^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \ldots + \left(a_n^{\alpha} b_n^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right)^{\alpha+\beta}$$

דוגמאות ותרגילים

1. $a, b, c > 0$. הוכח כי $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}$.

2. $a, b, c > 0$. הוכח כי $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.

3. (AM-GM, הולדר)

(א) $a, b, c \ge 0$ ובנוסף $ab + bc + ca \ne 0$. הוכח כי $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge 2$.

(ב) בכל משולש (צלעות a, b, c, תיכונים מהקודקודים הנגדיים m_a, m_b, m_c) מתקיים $\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4. (AM-GM) $a, b, c \ge 0$, ובנוסף $(a+b)(a+c)(b+c) = 8$.

הוכח כי $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[27]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}}$.

5. (AM-GM) $a, b, c \ge 0$; $a + b + c = 3$.

הוכח כי $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + 5 \ge (a+b)(a+c)(b+c)$.

6. (הולדר) $a,b,c>0$ ובנוסף $a+b+c=1$.

הוכח כי $\frac{3}{4}\leq\left(ab+bc+ca\right)\left(\frac{a}{b^2+b}+\frac{b}{c^2+c}+\frac{c}{a^2+a}\right)$, כלומר $\left(ab+bc+ca\right)\left(\frac{a}{b^2+b}+\frac{b}{c^2+c}+\frac{c}{a^2+a}\right)\geq\frac{3}{4}$.

7. (הולדר) עבור $k>0$ וכל n מספרים חיוביים a_i, הוכח כי

$$\left(1+\frac{a_1^{k+1}}{a_2^k}\right)\left(1+\frac{a_2^{k+1}}{a_3^k}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^{k+1}}{a_1^k}\right)\geq\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+a_n\right).$$

8. (AM-GM) $a,b,c>0$; $abc=1$. הוכח כי $\sum_{cyc}\frac{a}{a+b^2+c^2}\leq1$.

9. (C-S) $a,b,c>0$; $a+b+c\leq ab+bc+ca$. הוכח כי $\sum_{cyc}\frac{a}{a+b^2+c^2}\leq1$.

10*. (AM-GM, C-S) $a,b,c\geq0$; $ab+bc+ca\geq0$. הוכח כי

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{3}{5}}+\left(\frac{2b}{a+c}\right)^{\frac{3}{5}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{3}{5}}\geq3$$

11*. (C-S) $a,b,c\neq0$; $ab+bc+ca\geq0$. הוכח כי

$$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\leq\sqrt{5\left(a^2+b^2+c^2\right)+4\left(ab+bc+ca\right)}$$

12**. (AM-GM, SOS) $a,b,c>0$. הוכח כי

$$\frac{a+b}{\sqrt{c^2+3ab}}+\frac{a+c}{\sqrt{b^2+3ac}}+\frac{b+c}{\sqrt{a^2+3bc}}\geq3$$

13. $x,y\geq0$; $x^2+y^3\geq x^3+y^4$. הוכח כי

א. (AM-GM) $x^3+y^3\leq2$.

ב**. $x^5+y^5\leq2$.

14*. (AM-GM) $a,b,c\geq0$; $a^2+b^2+c^2=3$. הוכח כי $\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\leq1$.

15. (AM-GM) $a,b,c\geq0$. הוכח כי

$$\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)\geq4\sqrt[3]{abc\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right)}.$$

16. (AM-GM) $a,b,c\geq0$. הוכח כי $a^4b+b^4c+c^4a\geq abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

מיכאל רוזנברג,
אפריל 2011.