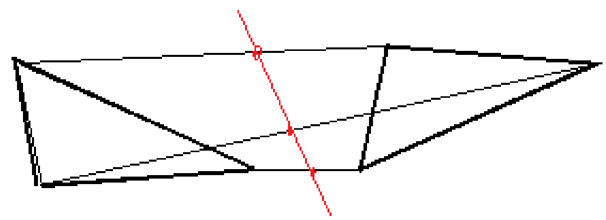
<u>תנועות המישור:</u>

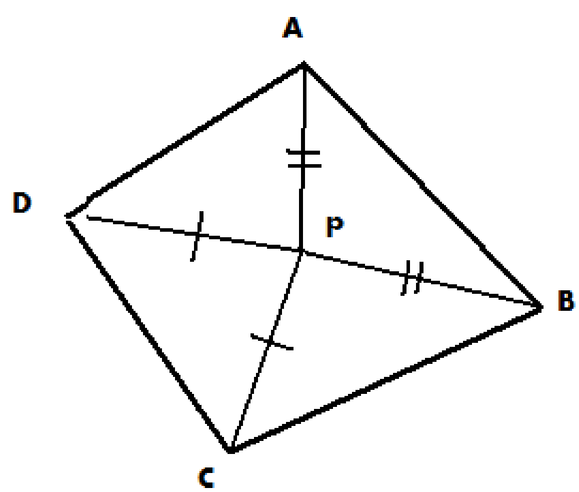
לפני שנתחיל לדבר על העתקות המישור, הנה כמה שאלות לדוגמא:

1. יהי ABC משולש, ו- A'B'C' משולש חופף לו, באוריינטציה הפוכה. הוכח כי מרכזי הקטעים AA',BB',CC' נמצאים כולם על ישר אחד.



2. יהי ABCD מרובע כמור, ונניח כי יש ב-ABCD נק' P המקיימת:
AP=BP
CP=DP
וכל הזוויות סביב P שוות ל-120 מעלות.

הוכח, כי יש נק' Q במישור, כך ש- BQC וכן AQD שווי צלעות.



3. נתון משולש ABC. מגדירים העתקה T:plane→plane כך. קודם משקפים סביב AB, אז סביב BC ואז סביב AC. מצאו את המקום הגיאומטרי של כל הנק' שבהן d(x,Tx) מינימלי.

<u>ולענייננו:</u>

<u>שאלה</u> מה זה בעצם אומר ש-2 צורות הן חופפות?

עבור משולש יש תשובה פשוטה: אם כל הזוויות וכל הצלעות שלו חופפות.
ומה לגבי משובע? ומצולע בן 5771 צלעות?

<u>התשובה היא כמובן</u>: צורות A ו-B נקראות חופפות אם ניתן לשים אותן אחת על השניה ככה שהן תתאמנה בדיוק.
אבל מה זה בעצם אומר "לשים אחת על השניה"?

כלומר, אילו "תנועות חוקיות" אתם מכירים שבעזרתם אפשר להראות ש-2 צורות הן חופפות?

(צועקים כל מיני דברים כמו הזזה, שיקוף וסיבוב).

הנה 3 דוגמאות:

הזזה: לבחור ווקטור כלשהו ולהוסיף אותו לכל הנק'.
סיבוב: לבחור נק' כלשהי במישור ולסובב אותו מסביבה בזווית נתונה (חיובית או שלילית).
שיקוף: לבחור ישר ולשקף את כל המישור ביחס אליו.

המשותף לכל אלה הוא שכולן תנועות של המישור, כאשר:

תנועת המישור: העתקה של המישור לתוך עצמו ששומרת מרחקים בין כל 2 נקודות.

(הערה: בלעז העתקות אלה נקראות **איזומטריות** של המישור)

המטרה שלנו היא לסווג את כל תנועות המישור. לסיווג זה קוראים משפט של (shall).
קל לראות כי כל משפחת ההעתקות שמנינו קודם היא משפחה של העתקות המישור. מהן ניתן לקבל עוד רבות בעזרת הרכבה.

למי שלא מכיר: fog או f "הרכבה על" g פירושו להפעיל קודם את g ואז את f, כלומר $fog(x)=f(g(x))$.

מכאן, שכל העתקה שהיא הרכבה של הזזות, סיבובים ושיקופים היא העתקת המישור.

ונשאלת השאלה, האם ייצרנו ככה העתקות מישור חדשות שעוד לא ידועות לנו?

כדי להבין מה קורה פה, נצטרך את הלמה הבאה:

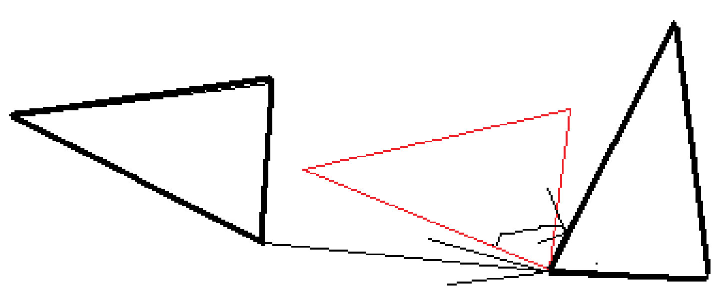
הלמה המרכזית: העתקת המישור נקבעת לפי תמונותיהן של 3 שאינן על ישר אחד.

הוכחה: למעשה צריך להראות כי יש נק' אחת לכל היותר במרחקים נתונים מ-3 נק' שאינן על ישר אחד. עבור 2 נק' נקבל חיתוך של 2 מעגלים, כלומר 2 נק' אפשריות. המרחקים שלהן מהנק' השלישית שונות, ולכן רק נק' אחת מתאימה.

ננסה להבדיל בין 2 סוגים חשובים של העתקות: תנועות עצמיות ותנועות לא עצמיות.

לתנועות המישור ששומרות על אוריינטציה נקרא תנועות עצמיות, לכאלה שהופכות אותה נקרא תנועות לא-עצמיות. אז נוכל למיין לחוד תנועות עצמיות ולא עצמיות.

<u>**מיון תנועות עצמיות:**</u>
טענה: כל תנועה עצמית היא הרכבה של הזזה וסיבוב.
הוכחה: נבחר 3 נק' שאינן על ישר אחד, A,B,C. התמונות שלהן הן: A',B',C'. ניתן לעבור מ-AB ל- A'B' ע"י הזזה ואז סיבוב. נטען, כי כך קיבלנו כבר גם את **C->C'**. יש לתמונה של C' שתי אפשרויות, שהן שיקוף אחת של השניה ביחס ל- A'B'. אבל אחת מהן מכילה שיקוף יחיד ולכן מגדירה תנועה לא עצמית.



קיבלנו תוצאה טובה: כל העתקה עצמית היא הרכבה של הזזה וסיבוב. אבל אפשר לקבל יותר טוב מזה: בשביל זה, ננסה לקבל *כל העתקה* בעזרת שיקופים.

טענה: כל סיבוב הוא שיקוף סביב שני ישרים נחתכים, וכל הזזה היא שני שיקופים ביחס לישרים מקבילים.
הוכחה: זה קל, פשוט צריך לבחור נכון את הישרים.

מסקנה: הרכבה של הזזה וסיבוב הוא סיבוב באותה זווית.
הוכחה: גם זה קל, נציג הכל כשיקופים ונבחר שוב פעם את הישרים נכון...

קיבלנו מיון מלא של של התנועות העצמיות:
כל תנועה עצמית היא הזזה או סיבוב

ניתן בקלות גם להראות באותה שיטה, כי הרכבה של סיבובים הוא סיבוב בזווית שהיא סכום הזוויות.

<u>מיון תנועות לא עצמיות:</u>

טענה: כל תנועה לא עצמית של המישור היא הרכבה של הזזה ושיקוף.
הוכחה: באופן דומה לתנועה עצמית.

כעת, ננסה למיין יותר. נפרק את ההזזה לרכיב מקביל ורכיב מאונך ביחס לציר השיקוף. את החלק המאונך נפרק ל-2 שיקופים, ונקבל 3 שיקופים מקבילים שזה בעצם שיקוף מקביל אחד.
נשארנו עם שיקוף והזזה בכיוון מקביל. זו תנועה חדשה, קוראים לה **גלישה.**

סה"כ, קיבלנו מיון מלא של העתקות המישור:

לסיכום:

<u>משפט Chasles:</u> כל העתקה עצמית של המישור היא סיבוב או הזזה. כל העתקה לא עצמית של המישור היא גלישה.

אחת הטעויות הנפוצות היא שאנשים לא מכירים גלישות. זה למשל בדיוק הסיבה ששאלות 1 ו-3 אינן טריוויאליות:

פתרון ל-4 השאלות:

<u>שאלה 1:</u> יש העתקה לא-עצמית שמעבירה את ABC ל- A'B'C'. ממשפט shall זו גלישה. לכן, ציר הגלישה עובר בדיוק באמצעי AA',BB',CC'.

<u>שאלה 2</u>: _מהנתון נובע, כי סיבוב ב-120 מעלות מסובב ציקלית את ABCD. בפרט, הקטע AC עובר לקטע BD . כלומר, הם באותו אורך. לכן יש תנועה עצמית של המישור שמעבירה את AC ל-DB. נקבל בקלות כי מרכז הסיבוב הנ"ל הוא הנק' Q הרצויה (זהו סיבוב ב-60 מעלות...).

<u>שאלה 3:</u> הרכבה של 3 שיקופים היא תנועה לא-עצמית, ולכן היא גלישה. מכאן, ברור שהמקום הגיאומטרי הנ"ל הוא ציר הגלישה. אבל איך נדע מי הוא? לפי שאלה 1, מספיק למצוא עבור 2 נק' את מרכז הקטע AT(A). נבחר נק' נוחות, למשל B והשיקוף של C ביחס ל-AB. נקבל את הקטע המחבר את עקבי הגבהים ל-AC ו-AB. זהו המקום הגיאומטרי הדרוש.

נכון שזה יותר קל כשיודעים את משפט של?

<u>שאלה לסיום:</u> נתון קו שמחלק את ריבוע ל-2 חלקים חופפים. הוכיחו כי הוא עובר דרך מרכז הריבוע.

<u>הערה למקרה שנשאר זמן:</u> אחד הדברים המבלבלים בתנועות המישור היא העובדה שהן לא מקיימות את חוק החילוף. למשל, אם f סיבוב ב- g הזזה: אז fog ו- gof זו לא אותה העתקה. זו אחת המוטיבציות המרכזיות להבין אלגברה ללא חוק החילוף. מי שמתעניין יכול לחפש על החבורות הדיהדרליות, או לשאול אותנו בזמנו הפנוי ☺.