סכום ספרות

נסמן ב-$s(n)$ את סכום הספרות של n.

$s_2(8)$. האם קיים n שלם כך ש-$n, s(n), s\big(s(n)\big), \dots, s^{2026}(n)$ כולם ריבועים של מספרים שלמים שונים?

$s_6(42)$. יהיו $a > b$ שלמים חיוביים עבורם לכל n טבעי מתקיים:

$$s(an) = s(bn).$$

הוכיחו כי קיים k שלם עבורו $a = b \cdot 10^k$.

$s_4(84)$. מצאו את כל השלמים החיוביים k עבורם קיים קבוע c_k כך שלכל שלם חיובי n מתקיים ש-

$$\frac{s(kn)}{s(n)} \geq c_k$$

$s_2(538)$. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת באופן הבא:

$$a_{n+1} = a_n^{s(n)} + 1, \qquad a_1 \in \mathbb{N}.$$

הוכיחו כי לא קיים $m > 2500$ עבורו הסדרה $a_n \ mod\ m$ מחזורית ממקום מסוים.

$s_3(67)$. יהי $P(x)$ פולינום מתוקן עם מקדמים שלמים חיוביים. האם יתכן שהמעלה של P היא לפחות 2 ו-$s(k) \equiv s\big(P(k)\big)\ mod\ 2$ לכל k שלם חיובי?

$s_2(5708)$. עבור n שלם חיובי נסמן ב-$f(n)$ את המספר המינימלי k עבורו קיימת קבוצה X של n שלמים חיוביים המקיימת את התנאי הבא:

- לכל תת קבוצה $\emptyset \neq Y \subset X$ מתקיים:

$$s\left(\sum_{a \in Y} a\right) = k.$$

הוכיחו כי קיימים קבועים c_1, c_2 עבורם

$$c_1 \log(n) < f(n) < c_2 \log(n).$$

$s_2(5786)$. מצאו את כל הפולינומים עם מקדמים שלמים עבורם מתקיים:

$$s(m) = s(n) \Rightarrow s(|P(m)|) = s(|P(n)|)$$

לכל n, m שלמים חיוביים.

$s_6(1948)$. מצאו את כל הפולינומים $P(x)$ עם מקדמים שלמים עבורם $P(n)$ חיובי לכל n שלם חיובי, ו- $\frac{s(n)}{s\left(P(n)\right)}$ לא חסום.

$s_4(1434)$. יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים שלמים. הוכיחו כי קיימים שלמים k, d עבורם $s_2(k + id) - s_2(k) = a_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.
הערה: $s_2(n)$ מסמן את סכום הספרות ברישום הבינארי.

$s(2026)$. יהיו $P(x), Q(x)$ פולינומים עם מקדמים אי-שליליים עבורם לכל n שלם אי-שלילי מתקיים ש-$S\left(P(n)\right) = S\left(Q(n)\right)$.
הוכיחו כי קיים שלם k עבורו $P(x) - 10^k Q(x)$ הוא פולינום קבוע.