סדרות

1. נגדיר סדרה באופן הבא: $a_1 = 1$,

$$a_n = a_{n-1} + \lfloor\sqrt{a_{n-1}}\rfloor$$

הוכיחו כי בסדרה מופיעים אינסוף ריבועים שלמים.

2. נתונה הסדרה $a_n = n + \sqrt{2}$. בכל שלב ניתן לבצע את אחת הפעולות הבאות:

- לשכפל סדרה
- להוריד מספר איברים ראשונים מסדרה נתונה
- לסכום או להפריש שתי סרות
- להכפיל או לחלק שתי סדרות

האם ניתן להגיע לסדרה $b_n = n$?

3. תהי a_n סדרת מספריים עבורה לכל i, j מתקיים ש-

$$\left|a_{i+j} - a_i - a_j\right| \leq 1$$

הוכיחו כי לכל i, j מתקיים אי השוויון

$$\left|\frac{a_i}{i} - \frac{a_j}{j}\right| < \frac{1}{i} + \frac{1}{j}$$

4. פונקציה $f: (0,1) \to (0,1)$ מוגדרת ע"י $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x < \frac{1}{2} \\ x^2 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. מספרים a ו-b מקיימים $0 < a < b < 1$.
נגדיר סדרות a_n ו-b_n ע"י $a_0 = a, b_0 = b$ וכלל הנסיגה $a_n = f(a_{n-1}), b_n = f(b_{n-1})$. הראו שקיים $n > 0$ עבורו $(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$.

5. נגדיר סדרה באופן רקורסיבי, a_i יבחר להיות השלם עבורו $a_1 + \ldots + a_i$ הכי קרוב ל-$i\sqrt{2}$. האם הסדרה מחזורית?

6 נגדיר סדרה באופן הבא: $0 < a_1 = x < 1$ ו-$a_{n+1} = 1 - |1 - 2a_n|$. הוכיחו כי הסדרה מחזורית החל ממקום מסוים אם ורק אם x רציונלי.

7. נתון פולינום $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ שכל השורשים שלו ממשיים ו- $a_0 \neq 0$. הוכיחו כי לכל k או $a_k \neq 0$ או $a_{k+1} \neq 0$.

8. סדרת המספרים מוגדרת על ידי $a_0 = -1$, ונוסחת הנסיגה $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0$, לכל $n \geq 1$. הראו כי $a_n \geq 0$ לכל $n \geq 1$.

9. יהיו $0 < k < \frac{1}{2}$ ממשי ו-$0 < a_0, b_0 < 1$ מספרים ממשיים. נגדיר סדרות a_n, b_n באופן הבא:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}, \quad b_{n+1} = b_n^k$$

הוכיחו כי עבור כל n גדול מספיק $a_n > b_n$ או שעבור כל n גדול מספיק $a_n < b_n$, והבינו איזה אי-שוויון נכון.

10. נגדיר סדרה באופן הבא: $a_1 = a_2 = 1$,

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$$

הוכיחו כי כל אברי הסדרה שלמים.