

אינווריאנטים ותצוי

1. על הלוח כתובים המספרים 5,6,7,8,9 בכל שלב ושלב, בוחרים שני מספרים a, b שרשומים על הלוח ומחליפים אותם ב- $\frac{4a+3b}{5}$, $\frac{3a-4b}{5}$. האם לאחר מספר פעולות ניתן להגיע למצב 5,7,7,7,9?

2. בכל משבצת של לוח 2021×2021 רשום "1" או "1" – נסמן ב- R_i את מכפלת המספרים בשורה ה- i וב- C_i את מכפלת המספרים בעמודה ה- i . האם יתכן כי $\sum(R_i + C_i) = 0$?

3. סזיפוס משחק משחק ברביע הראשון. הוא מתחיל עם ארבע אבנים שנמצאות ב- $(0,0)$. מתי שירצה, הוא יכול להוריד אבן מהמיקום ה- (i, j) , ואז שתי אבנים מופיעות באופן קסום במקומות ה- $(i, j + 1)$ וה- $(i + 1, j)$. סזיפוס צריך שבכל משבצת תהיה לכל היותר אבן אחת. האם יכול סזיפוס להצליח במטרתו?

4. באי חיות 17 זיקיות אפורות, 15 זיקיות ירוקות ו-13 זיקיות חומות. כאשר שתי זיקיות מצבע שונה נפגשות, שתיהן מחליפות צבע לצבע השלישי (למשל אם זיקית אפורה וזיקית חומה נפגשו שתיהן הופכות להיות ירוקות וכו'). האם יכול לקרות שכעבור כמה זמן כל הזיקיות באי יהיו באותו צבע?

5. המספר 1 רשום על הלוח 9999 פעמים. מותר לנו לבצע את אחת משתי הפעולות הבאות:

(i) למחוק מהלוח ארבעה מספרים x, x, y, y ולרשום על הלוח את המספרים $x + y, x - y$.

(ii) למחוק אפסים מהלוח.

האם ייתכן שנגיע למצב שבו:

א. רק מספר אחד רשום על הלוח?

ב. לכל היותר שלושה מספרים רשומים על הלוח?

6. במעגל רשומים ארבעה מספרים שלמים אי-שליליים a, b, c, d . כל דקה מחליפים את המספרים ב- $|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|$. הוכיחו כי החל מרגע מסוים כל המספרים שיכתבו על הלוח יהיו אפסים.

7. על לוח רשומים $2n$ מספרים שלמים עוקבים. בכל מהלך, מחלקים את המספרים לזוגות באופן שרירותי, וכל זוג מוחלף בסכום והפרש של שני המספרים שהיו (לא חייבים להחסיר את הקטן מהגדול, כל ההחלפות מתבצעות בו-זמנית). הראו שהלוח לעולם לא יגיע שוב למצב שבו רשומים $2n$ מספרים עוקבים.

8. על הלוח רשום זוג המספרים $(1,1)$ בכל שלב אם על הלוח מופיע אחד מהזוגות $(x, y - 1)$, $(x + y, y + 1)$ אז ניתן להחליפו בזוג השני. באופן דומה, אם מופיע אחד מהזוגות (x, xy) , $(\frac{1}{x}, y)$ אז ניתן להחליפו בזוג השני. הוכיחו כי בכל הזוגות שנכתבו המספר הראשון יהיה חיובי.

9. נתון לוח משבצות אינסופי. בכל משבצת של חצי המישור התחתון נמצא חייל. בכל מהלך חייל קופץ מעל חייל סמוך לפי צלע למרחק של שתי משבצות ואוכל אותו. האם אפשר להעביר חייל כלשהו לשורה העשירית מעל חצי המישור שבו הם נמצאים בהתחלה?

10. עופר הפיזיקאי גילה חלקיק חדש וקרא לו "אימון". במעבדה של עופר יש מספר אימונים, חלק מזוגות האימונים שזורים, אימון אחד יכול להשתתף בהרבה קשרי שזירה. עופר גילה שהוא יכול לבצע שתי פעולות עם האימונים:

- אם יש אימון ששזור עם כמות אי-זוגית של אימונים אחרים עופר יכול להרוס אותו.
- עופר יכול ליצור אימון תאום לכל אימון במעדה. תהליך זה גורם לכל אימון חדש I' להיות שזור עם התאום שלו I וכל שני אימונים חדשים I', J' יהיו שזורים אם ורק אם התאומים שלהם I, J היו שזורים.

הוכיחו כי עופר יכול לבצע סדרה של פעולות מהסוגים הנ"ל ולגרום לכך שאף שני אימונים במעבדה לא יהיו שזורים.

11. בכל קודקוד של מחומש משוכלל רשום מספר שלם, כך שסכום המספרים חיובי. יותם בכל תור בוחר קודקוד שהערך a בו שלילי, מוסיף את a לערכים בשני הקודקודים השכנים אליו, והופך את הסימן של a . האם יכול להיות שיותם ימשיך לבצע מהלכים לנצח?