# שמורות וחצי

1. סיזיפוס משחק משחק ברביע הראשון. הוא מתחיל עם ארבע אבנים שנמצאות ב-$(0,0)$. מתי שירצה, הוא יכול להוריד אבן מהמיקום ה-$(i,j)$, ואז שתי אבנים מופיעות באופן קסום במקומות ה-$(i+1,j)$ וה-$(i,j+1)$. סיזיפוס צריך שבכל משבצת תהיה לכל היותר אבן אחת. האם יכול סיזיפוס להצליח במטרתו?

2. המספר 1 רשום על הלוח 9999 פעמים. מותר לנו לבצע את אחת משתי הפעולות הבאות:

$(i)$ למחוק מהלוח ארבעה מספרים $x,x,y,y$ ולרשום על הלוח את המספרים $x+y, x-y$.

$(ii)$ למחוק אפסים מהלוח.

האם ייתכן שנגיע למצב שבו:

א. רק מספר אחד רשום על הלוח?

ב. לכל היותר שלושה מספרים רשומים על הלוח?

3. על ציר המספרים בחלק מהנקודות השלמות יש מטבעות, יתכן יותר ממטבעה אחת באותה נקודה, סך הכל כמות סופית של מטבעות. בכל שלב ניתן לעשות אחת משתי הפעולות הבאות:
$(i)$ להוריד מטבע אחד מ-$n-1, n$ ולהוסיף מטבע אחד ל-$n+1$.
$(ii)$ להוריד שני מטבעות מ-$n$ ולהוסיף מטבע ל-$n+1, n-2$.
הוכיחו כי התהליך יסתיים ושהמצב הסופי תלוי רק במצב ההתחלתי ולא בפעולות שבוצעו.

4. עופר הפיזיקאי גילה חלקיק חדש וקרא לו "אימוֹן". במעבדה של עופר יש מספר אימונים, חלק מזוגות האימונים שזורים, אימון אחד יכול להשתתף בהרבה קשרי שזירה. עופר גילה שהוא יכול לבצע שתי פעולות עם האימונים:

- אם יש אימון ששזור עם כמות אי-זוגית של אימונים אחרים עופר יכול להרוס אותו.
- עופר יכול ליצור אימון תאום לכל אימון במעדה. תהליך זה גורם לכל אימון חדש $I'$ להיות שזור עם התאום שלו $I$ וכל שני אימונים חדשים $I', J'$ יהיו שזורים אם ורק אם התאומים שלהם $I, J$ היו שזורים.

הוכיחו כי עופר יכול לבצע סדרה של פעולות מהסוגים הנ"ל ולגרום לכך שאף שני אימונים במעבדה לא יהיו שזורים.

5. תהי $A_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ סדרה של מספרים ממשיים. בכל שלב מהסדרה $A_i = (x_1, \ldots, x_n)$ נבנה סדרה $A_{i+1}$ באופן הבא:
נבחר חלוקה של $\{1, \ldots, n\}$ לשתי קבוצות זרות $I, J$ כך שהביטוי

$$\left|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{j\in J} x_j\right|$$

יקבל את הערך המינימלי האפשרי (אם יש יותר מבחירה אחת לחלוקה אז בוחרים את אחת מהן באופן שרירותי).
לאחר מכאן נגדיר $A_{i+1} = (y_1, \ldots, y_n)$ כאשר $y_i = x_i + 1$ אם $i \in I$ ו-$y_i = x_i - 1$ אחרת.
הוכיחו כי קיים $i$ עבורו הקבוצה $A_i$ מכילה איבר $x$ כך ש-$|x| \geq \frac{n}{2}$.

**6.** על לוח משבצות בגודל 1000 על 1000 נצבעו K משבצות. המשבצות נחשבות שכנות אם יש להן צלע משותפת. בכל פעם תום מוצא משבצת שלפחות 3 משכנותיה צבועות וצובע גם אותה. בסוף המשחק הלוח כולו צבוע. האם יתכן
א. ש- K=334000?
ב. ש- K=335000?

7. לתומאס יש שורה של נורות באורך אי-זוגי. בהתחלה נורה אחת בדיוק דולקת. אם נורה כלשהי דולקת, תומאס יכול ללחוץ על כפתור שמתחתיה, על מנת לשנות את המצב של הנורות הסמוכות אבל לא של הנורה עצמה (מכבוי לדלוק או להפך).אין כפתור מתחת לנורות בקצוות. איזה מיקום התחלתי של הנורה הדולקת תומאס יוכל להדליק את כל הנורות?

8. בכל קודקוד של מחומש משוכלל רשום מספר שלם, כך שסכום המספרים חיובי. יותם בכל תור בוחר קודקוד שהערך $a$ בו שלילי, מוסיף את $a$ לערכים בשני הקודקודים השכנים אליו, והופך את הסימן של $a$.

א) הוכיחו שיותם לא ימשיך לבצע מהלכים לנצח.

ב)הוכיחו שכמות המהלכים לא תלויה בבחירות של יותם.

9. עבור תמורה של המספרים $1,2, \ldots, n$ ושלושה מספרים רצופים בתמורה $a, b, c$ (בסדר הזה) ניתן לבצע את אחד משתי הפעולות הבאות:
$(i)$ אם $a$ הוא החציון של $a, b, c$ אז ניתן להחליף את $a, b, c$ ב-$b, c, a$ (בסדר הזה).
$(ii)$ אם $c$ הוא החציון של $a, b, c$ אז ניתן להחליף את $a, b, c$ ב-$c, a, b$ (בסדר הזה).

קבוצה של תמורות שבה לכל שתי תמורות ניתן לעבור מאחר לשנייה על ידי הפעלה של הפעולות המותרות תקרא מחלקת שקילות. מצאו את הכמות המינימלית של מחלקות שקילות אליהן ניתן לחלק את כל $n!$ התמורות האפשריות.

10. על ציר המספרים בנקודה $x = 0$ ממוקמות $N$ אבנים. בכל תור, אבנר בוחר מספר טבעי $q$ ו-$2q$ אבנים שנמצאות באותה הנקודה, ומזיז $q$ מהן צעד ימינה ו-$q$ צעד שמאלה. אבנר רוצה שאחת האבנים תגיע לנקודה $x = \frac{N}{10}$.
א. הוכיחו כי קיים $C$ כך שבאמצעות $CN^3$ מהלכים אבנר יצליח להשיג את מטרתו.

ב*. הוכיחו כי קיים $C$ כך שבפחות מ-$CN^3$ אבנר לא יצליח להשיג את מטרתו.