

הולכים רחוק

- הערה: בכל השאלות, אלא אם צוין אחרת מדובר בגרף לא מכוון.
1. הוכיחו שמספר הצביעה של גרף, חסום מלמעלה על ידי כמות הקודקודים במסלול הפשוט הארוך ביותר בגרף.
הערה: מספר הצביעה של גרף זה המספר המינימלי k עבורו ניתן לצבוע את קודקודי הגרף ב- k צבעים, כך שכל זוג שכנים בצבעים שונים.
 2. נתון גרף G בעל n קודקודים בו כל הדרגות הן לפחות 3. נסמן ב- c_1, \dots, c_k את האורכים של כל המעגלים הפשוטים בגרף. מה הערכים האפשריים ל- $\gcd(c_1, \dots, c_k)$?
 3. יהי גרף קשיר G בעל כמות זוגית של קשתות. הוכיחו שניתן לפצל את הקשתות לאוסף של זוגות, כך שלכל זוג יש קודקוד משותף.
 4. נתון גרף G בעל 5786 קודקודים ו-2026 קשיר – כלומר עבור כל 2025 קודקודים שנסיר ממנו, שאר הגרף ישאר קשיר. הוכיחו שקיים מסלול פשוט בעל 4051 קודקודים, כך שאם נסיר את קודקודו, שאר הגרף ישאר קשיר.
 5. נתון גרף G בעל 5786 קודקודים. נתון שלכל שישית קודקודים שונים a, b, c, x, y, z קיימת קשת בין אחד מבין a, b, c לאחד מבין x, y, z . מה המסלול הפשוט הארוך ביותר שניתן להבטיח שקיים בגרף?
 6. נתון עץ בעל n קודקודים ו- k עלים, כך שקיימת בו אנטי-קליקה בעלת לפחות $\frac{n+k-1}{2}$ קודקודים. הוכיחו שהמסלול הפשוט הארוך ביותר בעץ מכיל כמות זוגית של קשתות.
 7. יהי גרף G . מעגל נקרא חסר מיתרים אם כל שני קודקודים לא צמודים במעגל לא מחוברים. נתון שבגרף מתקיים התנאי הבא: לכל מעגל חסר מיתרים וקודקוד v בגרף, מחובר אל לכל היותר קודקוד אחד מהמעגל. הוכיחו כי הגרף הוא 3-צביע.

8. יהי גרף קשיר G בעל n קודקודים. לכל זוג קודקודים u, v , נגדיר ב-
 $d_{min}(u, v)$ ו- $d_{max}(u, v)$ את אורכי המסלול הפשוט הקצר ביותר
והארוך ביותר בין u, v . נתון שלכל זוג קודקודים u, v קיימים זוג
מסלולים פשוטים באורכים $d_{min}(u, v)$, $d_{max}(u, v)$ שזרים
בקודקודים למעט u, v . מה הערכים האפשריים של כמות הקשתות
בגרף?

9. יהי גרף G עם n קודקודים ולפחות $2n^{1.5}$ קשתות. נאמר שקשת e הינה
מיתר במעגל C , אם היא מחברת זוג קודקודים לא סמוכים במעגל.
הוכיחו כי קיים בגרף מעגל C עם לפחות $|C|$ מיתרים.

10. נתון גרף מכוון G ומספרים a, b כך שדרגת הכניסה של כל קודקוד היא
לפחות a ודרגת היציאה היא לפחות b , ובין כל זוג קודקודים קיימת
לכל היותר קשת אחת. הוכיחו כי קיים בגרף מסלול פשוט באורך לפחות
 $a + b + 1$.