

פונקציונליות ייחודיות

פונקציונליות גאומטריות

- א. מצאו את כל הפונקציות f מישרים במישור לנקודות במישור כך שלכל זוג ישרים לא מקבילים l_1, l_2 נקבל ש $l_1 \cap l_2, f(l_1), f(l_2)$ על ישר
- ב. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ כך שלכל $p_1 \neq p_2 \in \mathbb{R}^2$ נקבל ש $f(p_1), f(p_2)$ על מעגל.
- ג. יהא $n \geq 2$ שלם, הוכיחו שכל $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ששולחת זוגות של נקודות במרחק אחד לזוגות של נקודות במרחק אחד היא איזומטריה.

פונקציונליות לכל

- ד. יהא n שלם חיובי ו f_1, \dots, f_n פונקציות ממשיות חסומות. יהו a_1, \dots, a_n ממשיים שונים. הוכיחו שקיים x ממשי כך ש

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) - f_i(x - a_i) < 1$$

- ה. תהא S קבוצה מגודל 35. נגיד שקבוצה F של פונקציות מ S ל S עונה על התכונה $P(k)$ אם לכל $x, y \in S$, קיימות $f_1, \dots, f_k \in F$ כך ש $f_k(f_{k-1}(\dots f_1(x) \dots)) = f_k(f_{k-1}(\dots f_1(y) \dots))$ מה השלם החיובי המינימלי m כך שאם יש ל F את $P(2019)$ אז יש לה את $P(m)$?
- מטא-פונקציונליות

- ו. איילה כותבת על הלוח את הביטוי

$$x_1 + \dots + x_n = x_1 + \dots + x_n$$

ואחר כך שמה f לפחות פעם אחת בצד שמאל ביחד עם סוגריים על מנת לקבל משוואה פונקציונלית כמו $x_1 + x_2 + x_3 = f(x_1 + f(f(x_2) + x_3))$. יהי $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ פתרון למשוואה הפונקציונלית של איילה, האם יתכן שלא קיים טבעי k כך ש $f^k(x) = x$?

קבוצת הביטויים הפונקציונליים הסטנדרטיים היא הקבוצה S הקטנה ביותר של ביטויים שעונה על התנאים הבאים

1. לכל $i, x_i \in S$

2. $-1, 1 \in S$

3. אם $U, V \in S$ אז $U + V, U \cdot V \in S$

ז. האם קיים ביטוי פונקציונלי סטנדרטי עם פתרון יחיד $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$?

ח. האם קיים ביטוי פונקציונלי סטנדרטי עם פתרון יחיד $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ כך שעבור $n \geq 1$, $f(n) = \varphi(n)$?