קומביאלגברה

1. על הלוח רשומים 2020 שלמים חיוביים. בכל דקה מינק מוחק שני מספרים ומחליף אותם בסכום, הפרש, מכפלה או מנה שלהם. אחרי 2019 דקות רשום מספר יחיד והוא -2020. הראו כי מינק היה יכול לסיים את התהליך גם עם המספר 2020.

2. על הלוח כתובים מספרים ממשיים שונים. שמעון רוצה לכתוב ביטוי שנותן את כל המספרים המופיעים על הלוח, ורק אותם. לשם כך, מותר לו לכתוב כל מספר ממשי שירצה, את הסימן המיוחד $\pm$, את הסימנים הרגילים $+$, $-$, $\times$ וסוגריים. בחישוב הביטוי, בכל מקום בו מופיע הסימן $\pm$ הוא יחושב גם כ $+$ וגם כ $-$, בכל קומבינציה אפשרית. למשל, אם על הלוח כתובים המספרים 4,6 שמעון יוכל לכתוב 5 ± 1, ואם על הלוח כתובים המספרים 1,2,3 שמעון יוכל לכתוב $\left(2\pm 0.5\right)\pm 0.5$. האם שמעון תמיד יכול לכתוב ביטוי כזה אם על הלוח כתובים:

א. המספרים 1,2,4.

ב. 100 מספרים ממשיים שונים כלשהם.

3. על הלוח רשום הסכום $\frac{?}{?}+\frac{?}{?}+\ldots+\frac{?}{?}$ (בסה"כ 1000 מחוברים). נגזרת ואינטגרל משחקים משחק, כל אחד בתורו מחליף את אחד מסימני השאלה במספר טבעי שלא נרשם עד כה על הלוח. נגזרת מתחילה ורוצה שהסכום הסופי לא יהיה שלם. אינטגרל מצידו רוצה שהסכום הסופי יהיה שלם. מי מהשחקנים יכול להבטיח לעצמו ניצחון במשחק?

4. איילה וברווז משחקים משחק. הם רושמים על הלוח שברים מהצורה $\frac{1}{n}$, כאשר n הוא מספר חיובי שלם. המהלך הראשון הוא של איילה. איילה רושמת רק שבר אחד בכל תור, וברווז רושם שבר אחד בתורו הראשון, שני שברים בתורו השני, שלושה שברים בתורו השלישי, וכך הלאה. ברווז רוצה שסכום המספרים על הלוח יהפוך למספר שלם אחרי מספר מהלכים. האם איילה יכולה למנוע את זה?

5. על הלוח רשומים בשורה המספרים $a_1,a_2,...,a_n$. יוסי רוצה לרשום מתחת לכל מספר a_i את המספר $b_i\ge a_i$ כך שלכל שניים מהמספרים $b_1,b_2,...,b_n$ המנה בין אחד מהם לשני היא מספר שלם. הראו כי יוסי יכול לבחור את המספרים כך שיתקיים אי-השוויון: $b_1b_2\cdot\ldots\cdot b_n\le 2^{(n-1)/2}a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n$.

6. במדינה זרה פעולות החיבור והחיסור מסומנות ע"י "!" ו-"?", אבל לא ידוע איזה סימן מתאים לאיזו פעולה חשבונית. כל פעולה מופעלת על זוג מספרים, אבל במקרה של חיסור לא ידוע–מהו סדר המחוסרים המקובל במדינה (האם מחסרים את המספר השמאלי מהימני או את הימני מהשמאלי), אך ידוע שהוא תמיד אותו דבר.

לדוגמה, הביטוי $a?b$ מסמל אחד מבין: $b-a$, $a-b$ או $a+b$. כמו כן, לא ידועה צורת הרישום של מספרים שלמים במדינה הזרה, אבל המשתנים a ו-b וסוגריים קיימים ומשתמשים בהם כרגיל. הסבירו כיצד באמצעותם ובאמצעות הסימנים "!" ו-"?" אפשר לכתוב ביטוי שערכו בוודאות $20a-18b$.

7. האם ניתן לצבוע את המספרים השלמים החיוביים ב3 צבעים, כך שלכל x, y מצבעים שונים, $x^2 - xy + y^2$ מהצבע השלישי?

8. תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ שתי תתי קבוצות סופיות של שלמים. נגיד שA, B מפסטנות זו את זו, אם קיימים מספרים שלמים $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots., \beta_n$, עבורם קיים x יחיד, שכמות ההופעות שלו בקבוצות:

$$A + \alpha_1, A + \alpha_2, \dots., A + \alpha_m$$

שונה מכמות ההופעות שלו בקבוצות:

$$B + \beta_1, B + \beta_2, \dots, B + \beta_n$$

קבעו עבור אילו רביעיות של טבעיים $n_1, d_1; n_2, d_2$, הקבוצות $\{d_2, 2d_2, \dots, n_2 d_2\}, \{d_1, 2d_1, \dots, n_1 d_1\}$ מפסטנות זו את זו.

הערה: עבור קבוצה $S \subseteq \mathbb{Z}$ ו$t \in \mathbb{Z}$ מספר, נגדיר את $S + t$ להיות $\{s + t | s \in S\}$.

9. האם קיימות שתי סדרות חסומות ... $a_1, a_2,$ וגם ... $b_1, b_2,$ כך שלכל $m > n$, מתקיים לפחות אחד מבין:

$$|b_m - b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad |a_m - a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}} ?$$

10. יהא $m \geq 2$ מספר שלם. תהא A קבוצה סופית של מספרים שלמים (לאו דווקא חיוביים), ותהנא $B_1, B_2, \dots, B_m$ תתי-קבוצות של A. נתון כי לכל $k = 1,2, \dots, m$ סכום איברי B_k שווה m^k. הוכיחו כי A מכילה לפחות $m/2$ איברים.

בתאבון!